ЧАСТО ВЖИВАНІ У АЛГЕБРІ І ГЕОМЕТРІЇ ФОРМУЛИ

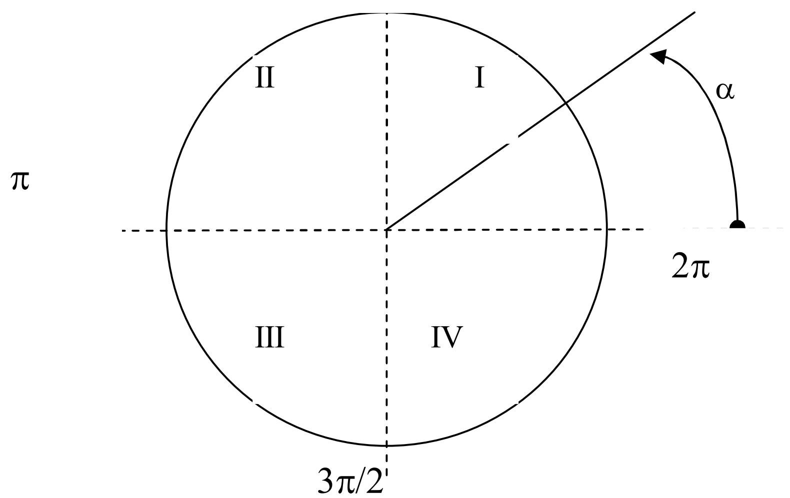
Формули приведення

	$\pi/2-\alpha$	$\pi/2+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$3\pi/2-\alpha$	$3\pi/2+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Значення тригонометричних функцій для кутів кратних 30° і 45° ($\pi/6$ і $\pi/4$) у I і II чвертях

	I чверть					***II чверть***			
град	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
радий	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sinα	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tgα	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0
ctgα	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Тригонометричне коло



Значення тригонометричних функцій для кутів кратних 300 і 450 ($\pi/6$ і $\pi/4$) у III і IV чвертях

	III чверть					*IV чверть*			
град	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
радий	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sinα	0	–1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	–1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	–1/2	0
cosα	–1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	–1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tgα	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	–1	$-1/\sqrt{3}$	0
ctgα	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Співвідношення між функціями

sin x = (2 tg x/2)/(1+tg2x/2)

sin x = (tg x)/v(1+tg2x)= 1/v(1+ctg2x)

cos x = (1–tg2x/2)/ (1+ tg^2 x/2)

cos x = 1/v(1+tg2x)= ctg/v(1+ctg2x)

$1+\cos\alpha = 2\cos^2 \alpha/2$

$1-\cos\alpha = 2\sin^2 \alpha/2$

$1+tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, $\alpha\neq\pi(2n+1)/2$

$1+ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$, $\alpha\neq \pi n$

Перетворення добутку у суму

sin x sin y = ½(cos (x–y) – cos (x+y))

cos x cos y = ½(cos (x–y)+ cos (x+y))

sin x cos y = ½(sin (x–y)+ sin (x+y))

Формули суми і різниці кутів

sin(x±y)= sin x cos y ±cos x sin y

cos (x±y) = cos x cos y ±sin x sin y

tg(x±y)= (tg x±tg y)/(1∓tg x tg y)

ctg(x±y)=(ctg x·ctg y∓1)/(ctg x±ctg y)

Функції кратних кутів

sin 2α=2sin α cos α= (2tgα)/(1+tg2α)

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$

$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1-2\sin^2\alpha$

$tg\,2\alpha = (2\,tg\alpha)/(1-tg^2\alpha)$

$ctg2\alpha = (ctg^2\alpha-1)/2ctg\alpha$

$\sin3\alpha= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin^3\alpha$

sin 3α=4sinα·sin(600–α)·sin (600+α)

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$tg3\alpha = (3tg\alpha-tg^3\alpha)/(1-3tg^2\alpha)$

tg 3α= tgα · tg (600–α) · tg (600+α)

$ctg3\alpha = (ctg^3\alpha-3ctg\alpha)/(3ctg^2\alpha-1)$

$\sin4\alpha=8\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha-4\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$\cos4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos2\alpha+1$

$tg4\alpha = (4tg\alpha-4tg^3\alpha)/(1-6tg^2\alpha+tg^4\alpha)$

ctg4α = (ctg4α–6ctg2α+1)/(4ctg3α–4ctgα)

Формули степеневих функцій

$\sin^2 \alpha/2 = (1 - \cos\alpha)/2$

$\cos^2\alpha/2 = (1 + \cos\alpha)/2$

$\sin^2\alpha = 1/(1+ctg^2\alpha) = tg^2\alpha/(1+tg^2\alpha)$

$\cos^2\alpha = 1/(1+tg^2\alpha) = ctg^2\alpha / (1+ctg^2\alpha)$

$\sin^3\alpha$ =¼ (3sinα – sin3α)

$\cos^3\alpha$ =¼ (cos3α +3cosα)

$\sin^4\alpha$ =1/8 (cos4α – 4cos2α+3)

$\cos^4\alpha$ =1/8 (cos4α + 4cos2α+3)

ïФормули половинного аргументу.

sin α/2 = ±√((1–cosα)/2)

cos α/2 = ±√((1+cosα)/2)

tg α/2 = ±√((1–cosα)/(1+cosα))= sinα/(1+cosα)=(1–cosα)/sinα

ctg α/2 = ±√((1+cosα)/(1–cosα))= sinα/(1–cosα)= (1+cosα)/sinα

Формули перетворення суми в добуток

sinx+siny=2sin((x+y)/2)·cos((x–y)/2)

sinx–sin y=2cos((x+y)/2)·sin((x–y)/2)

cos x+cosy=2cos((x+y)/2)·cos((x–y)/2)

cos x–cos y=–2sin((x+y)/2)·sin ((x–y)/2)

tg x + tg y = (sin (x+y))/(cos x cos y)

tg x – tgy = (sin (x – y))/ (cos x cos y)
ctg x + ctg y = (sin (x+y))/(sin x sin y)
ctg x – ctg y = – (sin (x–y))/(sin x sin y)
tg x + ctg y = (cos (x–y))/(cos x sin y)
ctg x – tg y = (cos (x+y))/(sin x cos y)

Зворотні тригонометричні функції

sin(arcsin α) = α cos(arccos α) = α
tg (arctg α) = α ctg (arcctg α) = α
arcsin (sinα) = α ; α∈ [–π/2 ; π/2]
arccos(cos α) = α ; α ∈ [0 ; π]
arctg (tg α) = α ; α ∈[–π/2 ; π/2]
arcctg (ctg α) = α ; α ∈ [0 ; π]
arcsin(sinα)=
1)α – 2πдо; α∈[–π/2 +2πдо;π/2+2πk]
2) (2k+1)π – α;
α∈[π/2+2πдо;3π/2+2πk]
arccos (cosα) =
1) α–2πдо ; α∈[2πдо;(2k+1)π]
2) 2πk–α ; α∈[(2k–1)π; 2πk]
arctg(tgα)= α–πдо
α∈(–π/2 +πдо;π/2+πk)
arcctg(ctgα) = α –πдо
α∈(πдо; (k+1)π)

Вираження одних кругових функцій через інші

arcsinα = –arcsin (–α)= π/2–arccosα =
= arctg α/√(1–α²)
arccosα = π–arccos(–α)=π/2–arcsin α=
= arc ctgα/√(1–α²)
arctgα =–arctg(–α) = π/2 –arcctgα =
= arcsin (α/√(1+α²))=
arccos(1/√(1+α²))
arcctg α = π–arcctg(–α) =
= arccos (α/√(1–α²))
arctg α = arcctg(1/α)
arcsin α + arccos α = π/2
arcctg α + arctg α = π/2

Тригонометричні рівняння

sin x = m ; |m| ≤ 1
$x = (-1)^n$ arcsin m + πk, k∈ Z

sin x =1	x = π/2 + 2πk
sin x = 0	x = πk
sin x = –1	x = –π/2 + 2 πk
cos x=m; |m|≤1	x = ± arccos m + 2πk
cos x = 1	x = 2πk
cos x = 0	x = π/2+πk
cos x = –1	x = π+ 2πk
tg x = m	x = arctg m + πk
ctg x = m	x = arcctg m +πk

Тригонометричні нерівності

sin α ≥ m
2πk+$α_1$? α ? $α_{2+}$2πдо
2πk+$α_2$? α? ($α_{1+2}$π)+ 2πдо
Приклад:
I cos (π/8+x) < √3/2
πk+ 5π/6< π/8 +x< 7π/6 + 2πk
2πk+ 17π/24 < x< π/24+2πk;;;;
II sin α ≤ 1/2
2πk +5π/6 ≤α≤ 13π/6 + 2πk
cos α ≥(≤) m
2πk + $α_1$ < α< $α_2$+2 πk
2πk+$α_2$< α< ($α_1$+2π) + 2πk
cos α ≥ – √2/2
2πk+5π/4 ≤α≤ 11π/4 +2πk
tg α≥(≤) m
πk+ arctg m ≤α≤ arctg m + πk
ctg ≥(≤) m
πk+arcctg m < α< π+πk

Прийоми тригонометрії

Розкладання на множники
sin 2x – √3 cos x = 0
2sin x cos x –√3 cos x = 0
cos x(2 sin x – √3) = 0
Заміна sin x/2 = 2t/(1+t2);
cos x/2 = (1–t²)/(1+t²), де t=tgx

Квадратне рівняння

ax²+bx+c=0; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$D=b^2-4ac>0 \rightarrow x_1 \neq x_2$; $D=0 \rightarrow x_1=x_2$

$D<0$, коренів немає.

Теорема Вієта

$x_1+x_2=-b/a$ $\quad x_1\cdot x_2=c/a$

Приведене квадратне рівняння

$x^2+px+q=0$ $\quad x_1+x_2=-p$ $\quad x_1\cdot x_2=q$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

<u>Прогресії</u>

Арифметична

$a_n=a_1+d(n-1)$ $\quad S_n=((2a_1+d(n-1))/2)n$

Геометрична

$b_n=b_{n-1}\cdot q$ $\quad b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

$b^2{}_n=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$

$S_n=b_1(1-q^n)/(1-q)$ $\quad S=b_1/(1-q)$

<u>Формули скороченого множення і розкладання на множники</u>

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2?ab+b^2)$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

<u>Показові рівняння</u>

Нерівності: Якщо $a^{f(x)}>(<)\ a^{a(ч)}$

$a>1$, то знак не міняється.

$a<1$, то знак міняється.

<u>Степені і корені</u>

$a^p\cdot a^g=a^{p+g}$ $\quad a^p:a^g=a^{p-g}$

$(a^p)^g=a^{pg}$ $\quad a^p/b^p=(a/b)^p$

$a^p\cdot b^p=ab^p$ $\quad a^0=1$; $a^1=a$

$a^{-p}=1/a^p$ $\quad {}^p\sqrt{a}=b \Rightarrow b^p=a$

${}^p\sqrt{a}\cdot {}^p\sqrt{b}={}^p\sqrt{ab}$ $\quad \sqrt{a}$; $a\geq 0$

$$\sqrt[p]{\sqrt[g]{a}}=\sqrt[pg]{a} \qquad \sqrt[pk]{a^{gk}}=\sqrt[p]{a^g}$$

$$\sqrt[p]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} \qquad a^{1/p}=\sqrt[p]{a} \qquad \sqrt[p]{a^g}=a^{g/p}$$

<u>Логарифми</u>

$(\log_a x=b)\Rightarrow(d^b=x)(a>0, a\neq 0)$

$d^{\log_a x}=x;\quad \log_a a=1;\quad \log_a 1=0$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$$

$$\log_a x^k=k\cdot\log_a x\ \ (x>0)$$

$$\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\cdot\log_a b=\log_a \sqrt[m]{b}$$

$$\log_a \sqrt[m]{b}=\log_{a^m} b$$

$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$$

<u>Логарифмічні нерівності</u>

$\log_a f(x)>(<)\log_a \varphi(x)$

1. $a>1$, то : $f(x)>0$
   $\varphi(x)>0$
   $f(x)>\varphi(x)$
2. $0<a<1$, то: $f(x)>0$
   $\varphi(x)>0$
   $f(x)<\varphi(x)$
3. $\log_{f(x)}\varphi(x)=a$

ОДЗ: $\varphi(x)>0$ $\quad f(x)>0$ $\quad f(x)\neq 1$

<u>Похідна</u>

$(xn)'=n\cdot xn-1$ $(ax)'=ax\cdot\ln a$

$(\lg ax)'=1/(x\cdot\ln a)$ $(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$ $(\mathrm{tg}\, x)'=1/\cos^2 x$

$(\mathrm{ctg}\, x)'=-1/\sin^2 x$

$(\arcsin x)'=1/\sqrt{(1-x^2)}$

$(\arccos x)'=-1/\sqrt{(1-x^2)}$

$(\mathrm{arctg}\, x)'=1/(1+x^2)$

$(\mathrm{arcctg}\, x)'=-1/(1+x^2)$

Властивості похідної

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$

<u>Рівняння дотичної до графіка</u>

$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$

Рівняння нормалі до графіка

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Знаходження довгі відрізка по його координатах

$L = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2)}$

Інтеграли

$\int$ xn dx = xn+1/(n+1)+ c

$\int$ ax dx = ax/ln a + c

$\int$ ex dx = ex + c

$\int$ cos x dx = sin x + cos

$\int$ sin x dx = – cos x + c

$\int$ 1/x dx = ln|x| + c

$\int 1/\cos^2 x = tg\ x + c$

$\int 1/\sin^2 x = -ctg\ x + c$

$\int 1/\sqrt{(1-x^2)}\ dx = \arcsin x + c$

$\int 1/\sqrt{(1-x^2)}\ dx = -\arccos x + c$

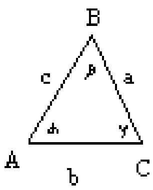
$\int 1/1+x^2\ dx = arctg\ x + c$

$\int 1/1+x^2\ dx = -arcctg\ x + c$

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a} ln\left|ax^2+c\right|$$

$$\int \frac{xdx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a} ln\left|ax^2+c\right|$$

Геометрія



Трикутники $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$

Теорема синусів

$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma = 2R$

Теорема косинусів

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Теорема тангенсів

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Бісектриса $l_a = (2bc \cdot \cos{\alpha/2})/(b+c)$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

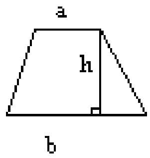
де ***p*** напівпериметр

p = ½ (a+b+c)

$S = ½ \cdot ab \sin\alpha$

$S_{равн.} = (a^2\sqrt{3})/4$

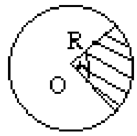
S = bh/2 S=abc/4R S=pr



Трапеція S = (a+b)/2· h

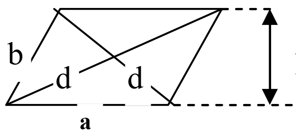
Коло $S = \pi R^2$

$S_{сектора} = (\pi R^2 \alpha)/360^0$



Паралелограм

S=ah $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$



Ромб

$d_1 = 2a \cdot \sin\alpha/2$;

$d_2 = 2a \cdot \cos\alpha/2$;

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$

$S = ah = a^2 \cdot \sin\alpha = ½ \cdot d_1 d_2$

Стереометрія

Паралелепіпед прямокутний

$V = S_{осн} \cdot P$ V=abc

Піраміда

$V = 1/3 S_{осн.} \cdot H$

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_{осн.}$

Піраміда усічена

$V = H/3 \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$

S_1 і S_2 — площі основи

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$

Конус

$V = 1/3 \cdot \pi R^2 H$

Sбок. = πRl

Sбок.= πR(R+1)

Конус усічений

Sбок.= πl(R1+R2)

V=1/3πH(R12+R1R2+R22)

Призма

V=Sосн.·H пряма: Sбок.=$P_{осн.}$·H

Sполн.=$S_{бок}$+2$S_{осн.}$

похила : Sбок.=$P_{пс}$·a

V = Sпс·a, a – бічне ребро.
Pпс — периметр
Sпс — площа перпендикулярного перетину

Циліндр

$V=\pi R^2 H$; Sбок.= $2\pi RH$
Sполн.=$2\pi R(H+R)$
Sбок.= $2\pi RH$

Сфера і куля

$V = 4/3\ \pi R^3$ – куля
$S = 4\pi R^3$ – сфера

Кульовий сектор

$V = 2/3\ \pi R^3 H$
H – висота сегменту

Кульовий сегмент

$V=\pi H^2 (R–H/3)$
$S=2\pi RH$

Степені деяких цілих чисел

n	2	3	4	5	6	7	8	9
n²	4	9	16	25	36	49	64	81
n³	8	27	64	125	216	343	512	729
n⁴	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
n⁵	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
n⁶	64	729	4096	15625	46656			
n⁷	128	2181						
n⁸	256	6561						

Проекція точки на пряму

Якщо в просторі аналітично задано:

точку $p(x,y,z)$ та пряму, яка проходить через точку $p_0(x_0,y_0,z_0)$ в напрямку $v(v_x,v_y,v_z)$. Позначимо точкою $p_\perp$ проекцію точки p на задану лінію.

Координати цієї точки знаходяться за формулою:

$$p_\perp = p_0 + \mathrm{proj}_v(p-p_0) = p_0+\frac{\langle p-p_0, v\rangle}{|v|^2}v = p_0+\frac{(x-x_0)v_x+(y-y_0)v_y+(z-z_0)v_z}{v_x^2+v_y^2+v_z^2}v.$$

Відстань від точки до прямої

$$d = |p-p_\perp| = \sqrt{|p-p_0|^2 - \frac{\langle p-p_0, v\rangle^2}{|v|^2}}.$$

В теорії ймовірностей прийнято називати “вдалими” (сприятливими) ті результати, які приводять до здійснення події, що цікавить нас у задачі. Якщо масова операція така, що подія. *A* спостерігається в середньому *a* разів серед *b* випадків, то ймовірність події *A* в даних умовах складає

$$p = \frac{a}{b} \qquad \text{або} \qquad p = 100\frac{a}{b}\%$$

Число a називається ще "частотою виникнення" події A. Імовірність – "відносною частотою".

Умовимося позначати через $P(A)$ імовірність події A. Якою б не була ця подія,

$$\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$$

Формули комбінаторики

Дуже часто, при розгляді конкретної масової операції буває складно визначити розміри не тільки числа сприятливих, але і числа всіх можливих подій, тому корисним буде використати формули для визначення кількості випадків, якщо має місце :

- перестановки $A_n^m = \quad n(n-1)(n-2)....(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$;
- розміщення $P_m = m!$;
- сполучення $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)....(n-m+1)}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Число сполучень (1.13) з n елементів по m – це число способів, якими можна вибрати m різних елементів з n (комбінації розрізнюються тільки складом елементів, але не їх порядком). Причому, $m \le n$.

Кожну задачу теорії ймовірностей можна звести до тієї або іншої задачі, де мова йде про виймання куль з урни. «Задачі на урни» є свого роду єдиною мовою, на якій можна викладати найрізноманітніші за зовнішньою формою задачі. Нехай, в урні a білих і b чорних куль; з урни наздогад виймають k куль. Знайти ймовірність того, що серед, них буде l білих, а, значить, $k - l$ чорних ($l \le a,\ k - l \le b$).

$$P(A) = \frac{C_a^l \cdot C_b^{k-l}}{C_{a+b}^k}$$

Розмах вибірки x_{min}-x_{max}

Вибіркове середнє для негрупованих даних визначається як середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i,$$

Медіаною статистичної вибірки називають таке значення варіанти $\boldsymbol{M_e}$, де одна половина вибіркових даних менша від $\boldsymbol{M_e}$, інша – більша від $\boldsymbol{M_e}$. Тобто *Медіаною* називається таке значення ознаки, що вивчається, яке припадає на середину варіаційного ряду. Медіана, взагалі кажучи визначається неоднозначно. При знаходженні медіани можливі два випадки:

якщо дані не груповані, і об'єм вибірки число непарне, n = 2r+1, то

$$M_e = x_{(r+1)},$$

якщо ж n = 2r, то медіану визначають як

$$M_e = \frac{1}{2}\left(x_{(r)} + x_{(r+1)}\right).$$

Для групованих даних медіану визначають або інтерполяцією, або графічно з допомогою нормованого полігону накопичених частот (див. рис. 1.7).

Модою називається варіанта M_d, яка найчастіше зустрічається в даному варіаційному ряду. Іншими словами, для дискретного ряду мода дорівнює варіанті з найбільшою частотою.

Похідні деяких основних елементарних функцій

Застосовуючи загальний спосіб знаходження похідної за допомогою границі можна одержати прості формули диференціювання.

Таблиця похідних основних елементарних функцій.

Функція	Похідна
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x

Функція	Похідна
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
x^x	$x^x\left(\ln x+1\right)$

Основні правила диференціювання

1. Похідна постійної рівна нулю, тобто $(C)'=0,\ \ C=const.$

2. Похідна аргументу рівна 1, тобто $x'=1$

У наступних правилах вважатимемо *u=u(x)* і *v=v(x)* – дві функції, що диференціюються, від змінної *x*.

3. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа складових диференціюються і дорівнює такій же сумі похідних цих функцій, тобто $(u+v)=u'+v'$.

4. Похідна добутку двох функцій, що диференціюються, рівна добутку похідної першого співмножника на другий плюс добуток першого співмножника на похідну другого, тобто $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

Слідство 1. Постійний множник можна виносити за знак похідної

$$(C\cdot u)'=C\cdot u' \qquad \left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}u'$$

Слідство 2. Похідна добутків декількох функцій, що диференціюються, рівна сумі добутків похідної кожного із співмножників на всі інші, наприклад

$$(uvw)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w'.$$

1. Похідна часткового двох функцій, що диференціюються, може бути знайдена за формулою (при $v\neq 0$) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$.

Слідство 3. $\left(\dfrac{C}{u}\right)'=-\dfrac{C}{u^2}\cdot u'$.

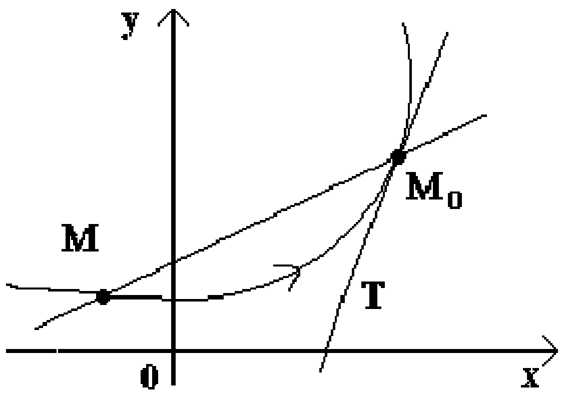


Рис. 3.2. Дотична до кривої

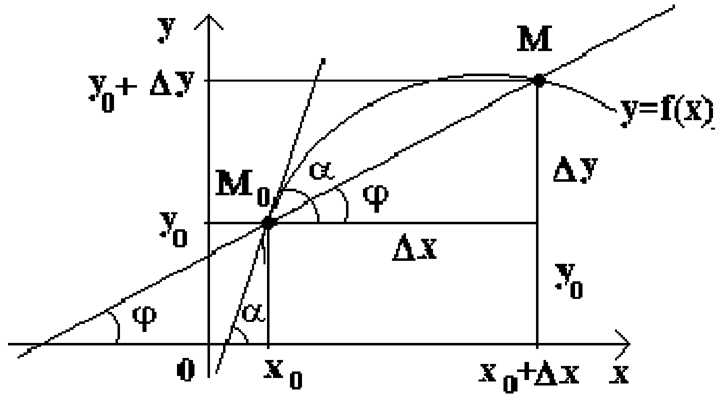


Рис. 3.3. Геометричне значення похідної функції

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

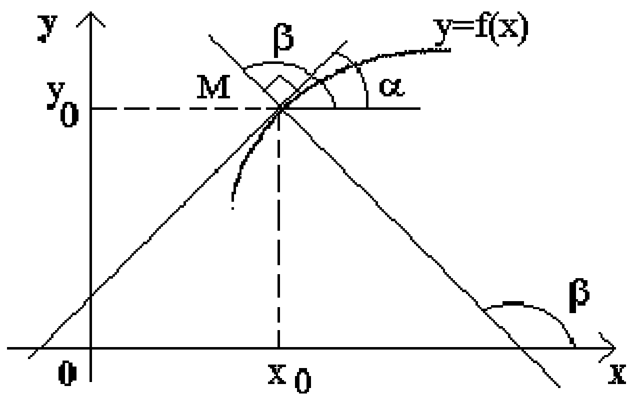


Рис. 3.4. Дотична і нормаль до кривої

Рівняння дотичної

$$y = f'(x_0)\cdot x + y_0 - f'(x_0)\cdot x_0$$

або $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

і нормалі до кривої

$$y = -\frac{1}{f\left(x_0\right)}\cdot\left(x - x_0\right) + f'\left(x_0\right)$$

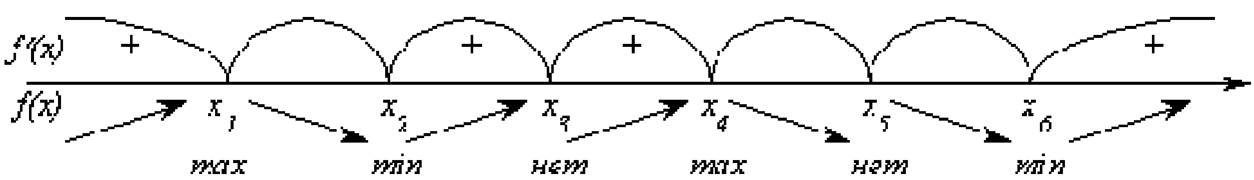
Теорема про похідну складної функції

Отже, щоб диференціювати складну функцію $y = f(u(x))$, потрібно узяти похідну від "зовнішньої" функції f, розглядаючи її аргумент, просто як змінну, і помножити на похідну від "внутрішньої" функції по незалежній змінній

$$f'\left(u\left(x\right)\right) = f'_u\left(u\right)\cdot u'_x\left(x\right)$$

Логарифмічне диференціювання застосовується для знаходження похідною від показово-степеневої функції за наступними правилами

$$y' = u^v\left(v\cdot\ln u\right)' = u^v\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) \qquad \left(u^v\right)' = v\cdot u^{v-1}\cdot u' + u^v\ln u\cdot v'$$



Екстремум	**Знак похідної ліворуч**	**Знак похідної праворуч**
MIN	-	+
MAX	+	-
НІ	+	+
НІ	-	-

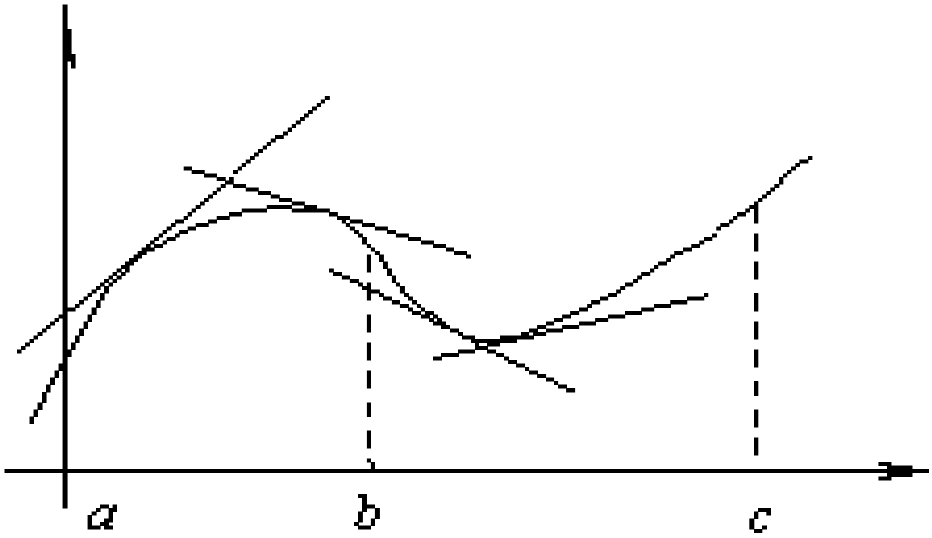


Рис. 3.25. Інтервали опуклості (увігнутості) функції

Первісна функція. Невизначений інтеграл

Якщо для $F(x)$ встановлена рівність $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ – первісна для $f(x)$, оскільки $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=F'(x)$.

Властивості невизначених інтегралів.
Таблиця невизначених інтегралів

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1) Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює функції, що знаходиться під знаком інтеграла, тобто $(\int f(x)\,dx)'=f(x)$ або $\int f'(x)\,dx= f(x)+C$;

2) Диференціал невизначеного інтеграла рівний виразу, що знаходиться під знаком інтеграла, тобто $d\int f(x)\,dx= f(x)dx$;

3) Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції рівний цій функції з точністю до постійного доданку, тобто $\int d\,f(x)=f(x)+C$;

4) Постійний множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)\,dx;$$

5) Інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) двох функцій рівний такій же

сумі (різниці) інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\ ;$$

Ця властивість справедлива для будь-якого кінцевого числа доданків.

6) Якщо вираз що знаходиться під знаком інтеграла, містить складну функцію виду $f(ax+b)$ і при цьому $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx =$ $= \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ при ($a \neq 0$).

З визначення невизначеного інтеграла виходить, що кожній формулі диференціального числення $F'(x) = f(x)$ відповідає формула:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де, $F(x)$ – якась одна з первісних функцій $f(x)$, а $C \in R$ – довільне число. За традицією C називають довільною постійною, і говорять, що невизначений інтеграл рівний сумі деякої первісної і довільної постійної.

Звідси виходить **таблиця невизначених інтегралів:**

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$
3. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C$
4. $\int \sin x\,dx = -\cos x+C$
5. $\int \cos x\,dx = \sin x+C$
6. $\int cos\,kx = \frac{1}{k}sin\,kx$
7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|+C$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|+C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x+C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x+C$
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$
13. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x+C$
14. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x+C$
15. $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln|\operatorname{ch} x|+C$
16. $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x|+C$
17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x+C$
18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x+C$
19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C$
20. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{arctg}\left(e^{x}\right)+C$

21.. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, \quad a \neq 0$

22. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C, \quad a \neq 0$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < a$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0$

25. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

26. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

27.. $\int \frac{xdx}{ax^2 + c} = \frac{1}{2a} ln\left|ax^2 + c\right|$ 28.. $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2 + c}} = \frac{x}{a} + C$

Формула інтегрування по частинах

Ідея методу *інтегрування по частинах* полягає в перетворенні функції, що знаходиться під знаком інтеграла, а реалізація заснована на так званій формулі інтегрування по частинах в невизначеному інтегралі.

Хай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – функції, що диференціюються. Тоді

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Помітимо, що $\int (uv)'dx = uv + C$, а $u'dx = du, v'dx = dv$. Довільна постійна C у остаточній формулі не пишеться, оскільки вважається, що вона міститься в інтегралі $\int vdu$.

Деякі функції вдається інтегрувати тільки за допомогою інтегрування по частинах. До них відносяться наступні два великі класи функцій.

1. *Перший тип* інтегралів, що беруться по частинах

$$\int x^n \cdot \begin{vmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{vmatrix} dx = \begin{Vmatrix} u = x^n, du = nx^{n-1} \\ dv = \begin{vmatrix} e^{ax} \\ \sin ax \\ \cos ax \end{vmatrix} dx, v = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} e^{ax} \\ -\cos ax \\ \sin ax \end{vmatrix} \end{Vmatrix}, n = 1, 2, \ldots .$$

Тут, після застосування формули інтегрування по частинах, показник степені у множника x^n зменшується на одиницю, а після $n-$кратного застосування формули цей множник зникає.

2. *Другий тип* інтегралів що береться по частинах

$$\int x^a \cdot \left|\begin{matrix}\ln^n x\\ \arcsin x\\ \operatorname{arctg} x\end{matrix}\right| dx = \left|\begin{matrix} u=\left|\begin{matrix}\ln^n x\\ \arcsin x\\ \operatorname{arctg} x\end{matrix}\right|, du = \left|\begin{matrix}\dfrac{n\ln^{n-1}x}{x}\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \dfrac{1}{1+x^2}\end{matrix}\right| dx \\ dv = x^a dx,\ v=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}\end{matrix}\right|, n=1,2,\dots;\ a\ge 0.$$

В цьому випадку після інтегрування по частинах зникають "складні" функції – логарифм, арксинус, арктангенс. Так само інтегруються арккосинус і арккотангенс.

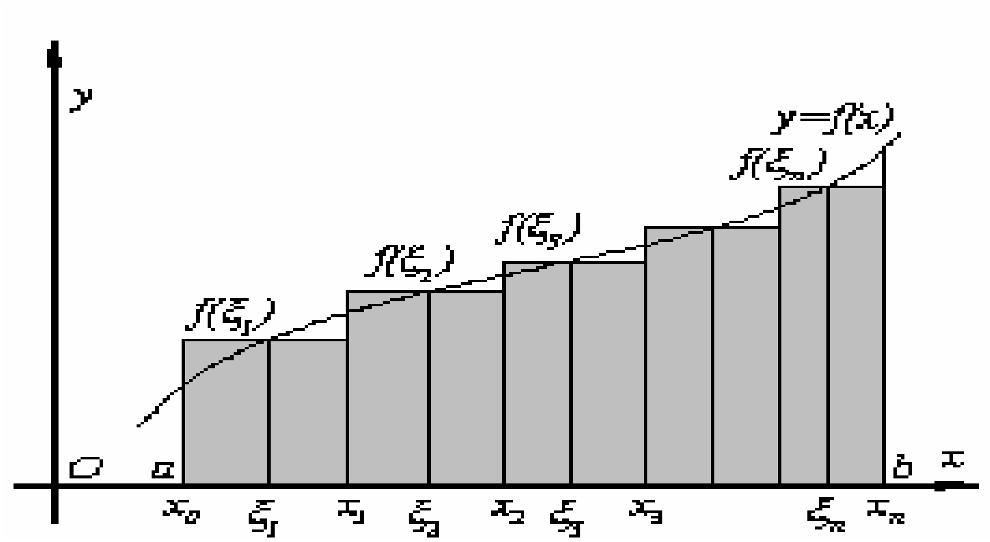


Рис. 2.1. Геометричне значення

Визначеним інтегралом $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ називається границя, до якої прагне інтегральна сума при цьому процесі, якщо границя існує: $I=\lim\limits_{n\to\infty;\lambda\to 0}\sigma$.

Якщо така границя існує, то він не залежить від первинного розбиття проміжку $[a;b]$ і вибору точок ξ_i.

Число a називається **нижньою границею інтегрування**, а число b– **верхньою границею інтегрування**.

Розглянемо фігуру, обмежену графіком безперервної, ненегативної на проміжку $[a;b]$ функції $f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі X, і прямими $x = a$; $x = b$. Таку фігуру називають криволінійною трапецією. На рис. 2.2. криволінійну трапецію виділено штрихуванням.

Площа S цієї трапеції визначається формулою

$$S = I = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x) < 0$ в усіх точках проміжку $[a;\ b]$ і безперервна на цьому проміжку, то площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком $[a;\ b]$ горизонтальної осі координат, прямими $x = a$; $x = b$ і графіком функції $y = f(x)$, визначається формулою $S = -\int_a^b f(x)dx$.

Формула для обчислення визначеного інтеграла від функції $f(t)$ на проміжку $[a;b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \tag{2.3}$$

яка називається формулою **Ньютона–Лейбніца**. Тут $F(x)$ – будь-яка первісна функції $f(x)$.

Для того, щоб обчислити визначений інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, потрібно знайти будь-яку первісну $F(x)$ функції $f(x)$ і підрахувати різницю значень первісної в точках b і a. Різницю цих значень первісної прийнято позначати символом $F(x)\Big|_a^b$.

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

1^0. Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

2^0. Координаты $(x;\ y)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3^0. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид

$$y=kx+q.$$

Угловой коэффициент k представляет собой значение тангенса угла, образуемого прямой с положительным направлением оси Ox, а начальная ордината q — значение ординаты точки пересечения прямой с осью Oy.

4°. Общее уравнение прямой имеет вид

$$ax+by+c=0.$$

5^0. Уравнения прямых, параллельных соответственно осям Oy и Ox, имеют вид

$$x=a;\ (17.5)\quad y=b.$$

6^0. Условия параллельности и перпендикулярности прямых $y_1=kx_1+q_1$ и $y_2=kx_2+q_2$ соответственно имеют вид

$$k_1=k_2;\ (17.7)\quad k_1k_2=-1.$$

7^0. Уравнения окружностей с радиусом R и с центром соответственно в точках $O\ (0;\ 0)$ и $C(x_0;\ y_0)$ имеют вид

$$x^2+y^2=R^2;\ (17.9)\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

8^0. Уравнение

$$y=ax^2+bx+c$$

представляет собой уравнение параболы с вершиной в точке, абсцисса которой $x_0=-b/(2a)$.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве

1^0. Расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

2^0. Координаты $(x;\ y;\ z)$ середины отрезка с концами $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3^0. Модуль вектора $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, заданного своими координатами, находится по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4^0. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, т. е. справедливы формулы

$$(a_1;\ a_2;\ a_3) + (b_1;\ b_2;\ b_3) = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3),$$
$$\lambda(a_1;\ a_2;\ a_3) = (\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3).$$

5^0. Единичный вектор $\bar{a}_0$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, находится по формуле

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

6^0. Скалярным произведением $\bar{a}\bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}| \cos \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

7^0. Скалярное произведение векторов $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2,\ b_3)$ выражается формулой

$$\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

В частности, $\bar{a}^2 = \bar{a}\bar{a} = |\bar{a}|^2$, откуда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

8^0. Косинус угла между векторами $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

9^0. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ имеет вид

$$\bar{a}\bar{b} = 0 \text{ или } a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

10^0. Общее уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n}(a;\ b;\ c)$, имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0.$$

11^0. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{n}(a;\ b;\ c)$